VARIEDADES COMPACTAS COM CURVATURA POSITIVA

Janaína da Silva Arruda[1], Rafael Jorge Pontes Diógenes[2]

Resumo: O presente trabalho descreve o estudo das superfícies compactas com curvatura positiva. Um dos teoremas clássicos em geometria diferencial é o Teorema de Gauss-Bonnet, que trata de triângulos geodésicos T em superfícies, cuja a soma de seus ângulos internos é igual a integral dupla da curvatura gaussiana K sobre T. O teorema de Gauss-Bonete divide-se em duas versões, local e global e nosso principal objetivo foi estudar as aplicações desse teorema com resultados de acordo com sua versão global. Umas das principais propriedades da característica de Euler-Poincaré é que ela é um invariante topológico de uma região regular R de uma superfície, o qual possibilita uma classificação topológica das superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$, e a partir desse resultado concluir que toda superfície S com curvatura gaussiana K positiva, compacta e conexa com $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera. Homeomorfismo é a principal noção de igualdade em topologia, ou seja, duas superfícies são homeomorfas se uma pode ser deformada na outra através de uma aplicação bijetiva contínua com inversa contínua. Em um caso mais particular, se a curvatura de uma superfície compacta e conexa for constante então ela é isométrica a uma esfera. Isometria é a principal noção de igualdade geométrica. Ou seja, ela é exatamente uma esfera.

Palavras-chave: Superfícies Compactas. Curvatura positiva. Característica de Euler-Poincaré. Teorema de Gauss-Bonnet.

[1] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências da Natureza e Matemática, e-mail: janasilvaarruda@gmail.com
[2] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências da Natureza e Matemática, e-mail: rafaeldiogenes@unilab.edu.br

INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial de curvas e superfícies estuda seus aspectos locais e globais. Os estudos das propriedades locais das curvas tornam-se importantes para a compreensão das propriedades locais das superfícies, ou seja, nas proximidades de um ponto, as quais possam ser aplicadas os métodos do cálculo diferencial. Torna-se importante estudar primeiramente as propriedades locais afim de identificar suas influências no comportamento das curvas e superfícies como um todo.

As superfícies regulares, diferentemente das curvas, são definidas como conjuntos e não como aplicações. Um subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ é uma superficie regular se existir uma vizinhaça V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X: U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. X é diferençável
2. X é homeomorfismo
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A partir do conhecimento da geometria das superfícies como a curvatura Gaussiana K definida como o determinante da aplicação linear dN_q, ou em termos das curvaturas principais, como o produto das mesmas $K = k_1.k_2$, da primeira forma fundamental, isometria entre superfícies, geodésicas e demais propriedades intrínsecas à superfície, pôde-se estudar a geometria da aplicação de Gauss e em seguida o teorema de Gauss-Bonnet e suas consequências, o qual trata de triângulos geodésicos T em superfícies, cuja a soma de seus ângulos internos é igual a integral dupla da curvatura gaussiana K sobre T.

Uma família finita dos triângulos geodésicos formam uma triangulação representada pela letra grega τ, e dado o número de faces F, o número de lados E e o número de vértices V dos triângulos geodésicos, calculamos a característica de Euler-Poincaré dada por

$$F - E + V = x \qquad (1)$$

Na versão global desse teorema temos algumas proposições importantes, principalmente que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico de uma região regular R de uma superfície, o qual possibilita uma classificação topológica das superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$.

Apresentaremos a lista topológica de todas as superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$ e o cálculo da característica de Euler-Poincaré da esfera. Outro resultado importante está no fato de que toda superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças dado por

$$g = \frac{2 - x(s)}{2}, \qquad (2)$$

Onde g é chamado o *gênero* de S.

Na geometria diferencial global estudamos um exemplo típico de teorema global, a rigidez da esfera. O qual enuncia que se a curvatura de uma superfície compacta e conexa for constante então ela é isométrica a uma esfera.

METODOLOGIA

A pesquisa foi desenvolvida através do conteúdo do Livro Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies do autor Manfredo Perdigão do Carmo. Os estudos das propriedades locais das curvas tornam-se importantes para a compreensão das propriedades locais das superfícies, ou seja, nas proximidades de um ponto, as quais possam ser aplicadas os métodos do cálculo diferencial.

Iniciou-se, então, com conceitos e resultados sobre as curvas parametrizadas – subconjuntos do R^3 podendo ser definidas por aplicações diferenciáveis – ressaltando os exemplos de curvas diferenciáveis e não diferenciáveis. O foco principal foi a teoria local das curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Com evidência na curvatura e na construção e função do Triedro de Frenet. Durante todo o estudo de curvas foram revisados conteúdos, como vetores, produto interno e produto vetorial, importantes para a compreensão da metodologia utilizada no livro. Finalizado o conteúdo de curvas iniciou-se o estudo de superfícies regulares voltado para a definição, exemplos e identificação de superfícies regulares por meio da definição e proposições dadas, que facilitam a identificação de uma superfície regular.

Logo após, iniciou-se o estudo sobre o plano tangente, e em como é constituído pelos vetores tangentes as curvas parametrizadas da superfície, terminando assim a parte mais teórica da pesquisa. Introduziu-se, então, a primeira forma fundamental, importante estrutura geométrica de uma superfície, conhecendo sua finalidade de fazer medidas sobre a superfície. O próximo conteúdo trabalhado foi a Geometria da Aplicação de Gauss no qual foi introduzido conceitos importantes como orientação de uma superfície, a aplicação de Gauss, curvaturas principais e direções principais, curvatura de Gauss e curvatura média, sem a utilização de coordenadas locais e depois expressos em coordenadas locais.

Terminada a geometria da aplicação de Gauss, introduziu-se a geometria intrínseca das superfícies, definida como o estudo das propriedades que podem ser expressas apenas em termos da primeira forma fundamental. Primeiramente, estudou-se o conceito de isometria entre superfícies regulares, dividindo-se em duas definições: a isometria global e a isometria local.

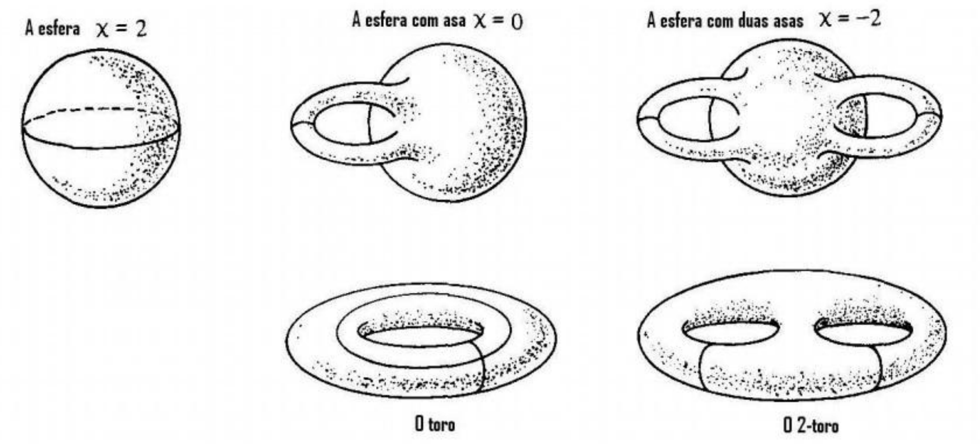
Após, estudou-se brevemente a definição de geodésicas, que são curvas parametrizadas em uma superfície, para introduzir o teorema de Gauss-Bonnet e suas aplicações. Este teorema trata de triângulos geodésicos em superfícies, cujos lados são arcos de geodésicas, o foco principal foi na versão global deste teorema foi o estudo da característica de Euler-Poincaré de uma superfície, definido como um invariante topológico e muito importante para as aplicações do teorema de Gauss-Bonnet que possibilita uma classificação topológica das superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Não obtivemos novos resultados com a pesquisa, em consequência da grande dificuldade na parte final que tratava da parte topológica do problema. Porém, houve um bom entendimento da teoria das superfícies, compreendendo o resultado principal.

Assim, calculamos a característica de Euler-Poincaré da esfera desenhando triângulos geodésicos na mesma, e utilizando a fórmula (1) encontramos o valor de $x = 2$. Outra forma para calcular a característica de Euler-Poincaré é através da fórmula (2), como a esfera não possui alças, obtivemos, também $x = 2$.

A seguir temos a “lista topológica” de todas as superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$.



De acordo com a lista topológica, uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ compacta e conexa, pode assumir os valores 2,0,...,-2,-2n,... da característica de Euller-Poincaré $x(s)$. Como a esfera possui $x(s) = 2$, conclui-se que toda superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças e que apenas a esfera possui a característica de Euller-Poincaré positiva.

E a partir do teorema de Gauss-Bonnet, que diz que em uma superfície compacta e orientada S tem-se

$$\iint_S K \ d\sigma = 2\pi x(s),$$

onde $\chi(S)$ é a característica de Euller-Poincaré. Essa igualdade determina uma relação entre geometria, a curvatura Gaussiana K, e a topologia, a característica de Euller-Poincaré. E a partir desse teorema, podemos deduzir o seguinte e resultado: Uma superfície compacta com curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.

É possível melhorar o resultado acima. De fato, se a curvatura de uma superfície compacta e conexa for constante então ela é isométrica a uma esfera. Tal resultado é conhecido como Rigidez da esfera e é estudado nas propriedades globais das superfícies.

CONCLUSÕES

Apesar das dificuldades encontradas no decorrer do desenvolvimento da pesquisa, pode-se compreender bem a geometria diferencial das superfícies, resultados e aplicações importantes para a geometria e para matemática. Utilizou-se como ferramenta, conhecimentos já adquiridos como a álgebra linear para trabalhar os conteúdos, tendo em vista que a disciplina de geometria diferencial não está presente no curso de licenciatura Ciências da Natureza e matemática.

AGRADECIMENTOS

A Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

Ao meu orientador Rafael Jorge Pontes Diógenes.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.