SEMANA UNIVERSITÁRIA
ISSN: 2447-6161

CAMPOS DE VETORES CONFORMES NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

João Francisco da Silva Filho[1], Marinaldo Braga da Silva[2]

Resumo: No presente trabalho, estudamos os campos de vetores conformes sobre o espaço Hiperbólico, destacando as relações existentes com os campos de vetores conformes no espaço Euclidiano, as quais são obtidas através de mudança conforme de métrica Riemanniana. Daremos atenção especial aos casos particulares, correspondentes aos campos conformes fechados, campos conformes gradientes, campos homotéticos, campos de Killing e campos paralelos. Os campos conformes sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores, cuja derivada de Lie resulta em um múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço, no entanto podemos introduzir uma definição mais elementar de derivada de Lie ao tratarmos do espaço Hiperbólico, que deverá coincidir com a definição geral referente a espaços Riemannianos. Devemos ressaltar que, o estudo dos campos de vetores conformes está diretamente relacionado ao estudo de algumas estruturas geométricas que vem sendo bastante exploradas nas últimas décadas, podemos citar como exemplos: solitons de Ricci, quase solitons de Ricci, variedades quasi-Einstein e solitons de Yamabe e quase solitons de Yamabe. Neste sentido, descrevemos explicitamente a função potencial dos campos de vetores conformes gradientes no espaço Hiperbólico, através de um quociente de expressões polinomiais, cujo número de variáveis coincide com a dimensão do referido espaço. Decorre desta expressão, a descrição explícita dos campos de vetores conformes gradientes no espaço Hiperbólico, bem como os fatores conformes (ou fatores de conformidade) dos campos de vetores supracitados.

Palavras-chave: Espaço Hiperbólico. Campos de vetores conformes. Fator conforme.

INTRODUÇÃO

O espaço Hiperbólico é um espaço Riemanniano completo, simplesmente conexo e que possui curvatura seccional constante negativa, corresponde portanto a um exemplo de *forma espacial* (ou *space form*). Este espaço Riemanniano pode ser obtida a partir do semi-espaço superior do espaço Euclidiano, munido com uma métrica conforme à métrica canônica do espaço Euclidiano. Devemos ressaltar que, o espaço Hiperbólico é um espaço Riemanniano homogêneo e constitui um exemplo de variedade de Einstein, ou seja, um espaço Riemanniano cujo tensor de Ricci é múltiplo da sua métrica Riemanniana.

Os campos de vetores conformes sobre um espaço Riemanniano são campos de vetores, cuja derivada de Lie resulta em um tensor que é múltiplo da métrica

[1] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Desenvolvimento Rural, e-mail: nome1@unilab.edu.br
[2] Universidade Federal do Ceará, Instituto de biologia, e-mail:autor2@ufc.br

ISSN: 2447-6161

Riemanniana do referido espaço e por analogia às transformações conformes, tais campos de vetores são chamados conformes. Os campos de vetores conformes correspondem a uma generalização dos campos de Killing e dos campos de vetores homotéticos, já que os campos de Killing podem ser vistos como campos de vetores conformes com fator conforme nulo, enquanto os campos de vetores homotéticos podem ser vistos como campos de vetores conformes com fator conforme constante.

Os campos de vetores conformes aparecem na Geometria Diferencial, principalmente no estudo de imersões sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera e espaço Hiperbólico), nos produtos diretos, produtos-warped, espaços Riemannianos homogêneos, espaços de Einstein e em alguns fluxos geométricos (fluxo de Yamabe e fluxo de Ricci). Estes campos de vetores também estão diretamente relacionados à curvatura escalar do espaço Riemanniano, no qual estão definidos, conforme podemos conferir nos trabalhos de Tashiro (1965) e Obata/Yano (1970).

Num certo sentido, podemos afirmar que os campos de vetores conformes correspondem a uma generalização dos solitons de Yamabe que são estruturas geradas por campos de vetores conformes particulares, cujo fator conforme (ou fator de conformidade) difere da curvatura escalar por uma constante. Por outro lado, devemos observar que os campos conformes constituem um caso particular dos quase solitons de Ricci e no caso do espaço Hiperbólico, estas estruturas coincidem, devido ao fato do espaço Hiperbólico ser uma variedade de Einstein.

No espaço Hiperbólico, podemos encontrar diversos exemplos de campos de vetores conformes (gradientes e não-gradientes), bem como seus casos particulares que são os campos de Killing e os campos de vetores conformes fechados, destacamos os exemplos construídos por Heintze (1988) sobre as formas espaciais. Por fim, devemos ressaltar que no espaço Hiperbólico, as definições associadas a campos de vetores conformes tornam-se mais elementares que as usadas em espaços Riemannianos, tornando-se bem mais acessível a um aluno de graduação que precisará apenas de noções básicas de Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Vetorial.

ISSN: 2447-6161

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme inicialmente planejado, obtivemos uma descrição explícita da função potencial dos campos de vetores conformes gradientes sobre o espaço Hiperbólico, através de um quociente de expressões polinomiais, cujo número de variáveis coincide com a dimensão do referido espaço. Deduzimos ainda da expressão da função potencial, uma expressão geral que descreve os campos de vetores conformes gradientes sobre o espaço Hiperbólico, bem como uma descrição explícita da função, correspondente ao fator conforme (ou fator de conformidade). Devemos ressaltar que o projeto gerou dois trabalhos, ambos em forma de artigo, podendo ser conferido nas referência indicadas em Oliveira et. al. (2017) e Silva e Silva Filho (2017), constante nas referências bibliográficas.

CONCLUSÕES

Após todo o estudo realizado e trabalho desenvolvido durante o período de vigência do projeto, deduzimos uma expressão geral que permite descrever a função potencial de qualquer campo de vetores conforme no espaço Hiperbólico. Esta expressão consiste de um quociente de expressões polinomiais, cujo número de variáveis coincide com a dimensão do espaço Hiperbólico em questão. Devemos ainda salientar que, a expressão obtida nos permite obter diretamente expressões gerais que descrevem os campos de vetores conformes no espaço Hiperbólico, bem como os seus respectivos fatores conformes (ou fatores de conformidade), que difere da função potencial por uma constante real.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – PIBIC/UNILAB, pelo suporte financeiro que possibilitou a realização do projeto “Campos de Vetores Conformes no Espaço Hiperbólico”.

ISSN: 2447-6161

REFERÊNCIAS

BESSE, A.L. **Einstein manifolds.** Berlin: Spring-Verlag, 2008. (Classics Mathematics).

GUIDORIZZI, H. G. **Um curso de cálculo**. 5ª ed.Vol.3. Rio de janeiro: LTC, 2002.

HAMILTON, R. S. **The Ricci flow in dimension three**. Journal Diferential Geometry, v. 17, p. 255-306, 1982.

HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ1. **Mathematische Annalen**, v. 280, p. 389-402, 1988.

LIMA, E. L. **Análise Real – Volume 2**: Funções de n variáveis, 6ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. **Curso de Análise - Volume 2**, 10ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. **Journal Differential Geometry**, v. 4, p. 53-72, 1970.

O'NEILL, B. **Semi-Rimannian Geometry with applications to relativity**. New York: Academic Press, 1983.

PETERSEN, P.; WYLIE. W. On gradient Ricci Solitons with symmetry. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 137, p. 2085-2092, 2009.

SILVA, M. B.; SILVA Filho, J. F. Um problema interessante sobre congruência de triângulos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 93, p. 42-44, 2017.

SILVA Filho, J. F. Quasi-Einstein manifolds endowed with a parallel vector Field. Fortaleza, 2015. **Monatshefte fur Mathematik**, v. 178 (2015). p. 01-16.

SILVA Filho, J. F. **Solitons de Ricci e métricas quasi-Einstein em variedades homogêneas**. 2013, 84 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 117, p. 251-275, 1965.