SEMANA UNIVERSITÁRIA
ISSN: 2447-6161
UNILAB Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

ANÁLISE TANGENCIAL PARA OBTENÇÃO DE REGULARIDADE EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Rodolfo Ferreira de Oliveira[1], Marcelo Dário dos Santos Amaral[2]

Resumo: Será estudada a Análise Tangencial que consiste de uma teoria de "perturbação de fontes e coeficientes" cujas ideias pioneiras surgem com DeBenedetto na metade do século passado e o método torna-se mais desenvolvida no final da década de 80 com o clássico artigo de Caffarelli. O nome se deve então ao fato de que, em certo sentido, em um processo limite, é possível obter estimativas de regularidade tangenciando então pelo problema que usualmente é o problema homogêneo de coeficientes constantes, da qual importa-se, de certa forma, regularidade, quando o termo não homogêneo tende a zero e os coeficientes variáveis tendem aos coeficientes constantes. Naturalmente, a matemática desenvolveu-se bastante de lá para cá e tal abordagem mostrou-se uma poderosa ferramenta para obtenção de regularidade para Equações Diferenciais Parciais em diversos cenários, por exemplo, equações elípticas e parabólicas na forma divergente, totalmente lineares. Além disso, é possível obter regularidade interior, na fronteira e consequente regularidade global, dado que é sabido que regularidade interior mais regularidade global pode implicar em regularidade até a fronteira. Neste sentido, busca-se neste trabalho aplicar o poderoso método de Análise Tangencial na demonstração do Teorema de Schauder, o qual busca estabelecer regularidade para a famosa equação de Poisson.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Teorema de Schauder. Análise Tangencial.

INTRODUÇÃO

O Teorema de Schauder busca estabelecer regularidade para a equação de Poisson:

$$-\Delta u = f, em\ B_1$$

Onde $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ é a bola unitária. O teorema de Schauder estuda a continuidade da Hessiana a partir da continuidade do Laplaciano. O enunciamos abaixo:

Teorema: Seja u uma solução fraca da equação de Poisson, a saber $\Delta u = f$, em B_1. Suponha que f é α-Holder contínua na origem, ou seja $[f]_{C^{\alpha}(0)} < \infty$. Então existe uma constante C_0 que depende apenas da dimensão e do expoente α, e um polinômio quadrático $p(x) = x^t Ax + b \cdot x + c$ tal que:

[1] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, e-mail: rodolfoyondaime26@gmail.com
[2] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, e-mail: marceloamaral@unilab.edu.br

$$|u(x) - p(x)| \leq C_0 \left([f]_{C^\alpha(0)} + \left|\left|u\right|\right|_{L^2(B_1)} \right) |x|^{2+\alpha}$$

Ademais,

$$|A| + |b| + |c| \leq C_0 \left(f(0) + [f]_{C^\alpha(0)} + \left|\left|u\right|\right|_{L^2(B_1)} \right)$$

METODOLOGIA

A análise Tangencial pode ser dividida em 6 passos, a saber:

1. Regime de Pequenez
2. Resultado de Aproximação (Método de Compacidade)
3. Passo Chave
4. Regularidade Discreta
5. Passagem do Discreto para o Contínuo
6. Regularidade Pontual implica em Regularidade Local.

O primeiro passo significa basicamente que podemos, sem perca de generalidade, provar o resultado admitindo a pequenez do termo não homogêneo e da oscilação dos coeficientes. O segundo garante que podemos tomar tão próximo quanto queiramos a solução do problema homogêneo com a solução do problema não-homogêneo, desde que o passo 1 seja garantido. O Passo-Chave é o pontapé inicial para a obtenção da regularidade discreta, pois é o caso inicial do processo de indução finita que é a base para o 4º passo. No 5º passo, como o nome sugere, saímos do ambiente discreto rumo ao contínuo e por fim, no 6º passo obtemos regularidade pontual, que sabemos que implica em regularidade local.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com a descrição do método de análise tangencial feita, vamos agora discutir cada passo, demonstrando alguns dos resultados e, devido à complexidade do tema que não cabe nas linhas deste trabalho, deixar outros resultados omitidos.

Passo 1: Regime de Pequenez. Assim, seguindo o método descrito, podemos supor, sem perca de generalidade que:

$$\left|\left|u\right|\right|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \quad e \quad [f]_{C^\alpha(0)} \leq \delta$$

Isto é totalmente plausível. De fato, definindo:

$$w(x) = \frac{u(x)}{||u||_{L^\infty(B_1)} + \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}}$$

Obtemos facilmente que w é normalizada na métrica L^∞, isto é, $||w||_{L^\infty(B_1)} \leq 1$. E definindo $\Delta w \coloneqq \bar{f}$, é trivial que:

$$\bar{f} = \frac{f}{||u||_{L^\infty(B_1)} + \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}} \to [\bar{f}]_{C^\alpha(0)} \leq \delta$$

Passo 2: Resultado de Aproximação. O resultado a seguir indica que, numa métrica conveniente, podemos tomar suficiente pequena a distância entre a solução do problema não-homogêneo e a solução do problema homogêneo.

Lema: Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer solução fraca de $\Delta u = f$, em B_1 com:

$$||u||_{L^\infty(B_1)} \leq 1 \qquad e \qquad ||f||_{L^\infty(B_1)} \leq \delta$$

Existe uma função harmônica h em $B_{\frac{1}{2}}$ tal que:

$$||u - h||_{L^\infty(B_1)} \leq \epsilon$$

Passo 3: Passo Chave. A etapa seguinte consiste de uma preparação do terreno para a obtenção da regularidade discreta, pois é o caso $n = 1$ do processo indutivo que será utilizado no passo posterior. Dito isto, enunciamos o lema abaixo:

Lema: Fixado $\alpha \in (0,1)$, existem constantes $C_0 > 0, 0 < \lambda_0 < 1$ e $\delta > 0$ tais que $\Delta u = f$ em B_1 com:

$$||u||_{L^\infty(B_1)} \leq 1 \qquad e \qquad ||f||_{L^\infty(B_1)} \leq \delta$$

Então é possível obter polinômio quadrático na origem $P(x) = x^t Ax + b \cdot x + c$, satisfazendo $|A| + |b| + |c| \leq C_0$ e:

NEA ONNIM NO SUA, OHU SEMANA UNIVERSITÁRIA
ISSN: 2447-6161
UNILAB Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

$$|u(x) - p(x)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}, se\ |x| \leq \lambda_0$$

Passo 4: Regularidade Discreta. Com os passos anteriores estamos preparados para obter a regularidade discreta. Assim enunciemos o próximo Lema:

Lema (Processo Iterativo): Fixado $\alpha \in (0,1)$, existem constantes $C_0 > 0$, $\lambda_0 \in (0,1)$ e $\delta > 0$ tais que se $\Delta u = f$ em B_1, com:

$$||u||_{L^\infty(B_1)} \leq 1 \quad e \quad [f]_{C^\alpha(0)} \leq \delta$$

Então é possível obter polinômio quadrático harmônico, $p_k(x) = x^t A_k x + b_k x + c_k$, satisfazendo $|A_k| + |b_k| + |c_k| \leq C_0$, e além disso:

$$|u(x) - p_k(x)| \leq \lambda_0^{k(2+\alpha)}, se\ |x| \leq \lambda_0^k$$

Passo 5: Passagem do discreto para o contínuo. O objetivo agora é obter resultados mais robustos, mostrando que a solução do problema homogêneo se aproxima da solução do problema não-homogêneo para qualquer x, tal que $|x| \leq 1$. Isto é, que existe polinômio quadrático harmônico tal que $|u(x) - P(x)| \leq C|x|^{2+\alpha}$.

Fixado $\lambda_0 \in (0,1)$, dado $x \in B_1$, $\exists k \in \mathbb{N}$, tal que $|\lambda_0|^{k+1} \leq |x| < \lambda_0^k$, isto é, $|\lambda_0^k| \leq \frac{|x|}{\lambda_0}$. Além disso, não é difícil mostrar que os coeficientes A_k, b_k e c_k são Cauchy, isto é, existem coeficientes A, b e c, tais que:

$$A_k \to A \quad b_k \to b \quad c_k \to c$$

Surgem assim os candidatos naturais para os coeficientes de P, isto é, supomos $P(x) = x^t A x + bx + c$. Por desigualdade triangular concluímos o resultado.

$$|u(x) - P(x)| \leq |u(x) - p_k(x)| + |p_k(x) - P(x)|$$

$$\leq \frac{1 + 3C_0}{\lambda_0^{2+\alpha}} |x|^{2+\alpha} \coloneqq C|x|^{2+\alpha} \quad \blacksquare$$

O que conclui a versão pontual do Teorema de Schauder.

ISSN: 2447-6161

Passo 6: Regularidade Pontual implica em Regularidade Local. É interessante observar que o Teorema acima fornece regularidade pontual de u baseado na respectiva continuidade pontual de f. Não é difícil verificar que estimativas pontuais implicam em estimativas locais como enunciadas no Teorema. De fato, se assumirmos que $f \in C^{\alpha}(B_1)$ e para cada $x_0 \in B_{1/2}$ aplicarmos o Teorema à função:

$$v(x) = 4u\left(x_0 + \frac{x}{2}\right)$$

Reobteremos a versão local do Teorema de Schauder.

CONCLUSÕES

O método de Análise Tangencial é largamente utilizado em matemática de ponta contemporânea, por isto quero dizer que diversos reconhecidos nomes internacionais, ganhadores de prêmios tais como Luis Caffarelli, Antonio Figalli, Henry Berestichk, Eduardo Teixeita, somente para citar alguns, tem elucidados problemas de regularidade nos mais variados cenários como já explicitado na introdução.

Por isto este é um estudo promissor e audacioso. Ressaltamos que o Teorema de Schauder é o cenário onde menos prérequisitos são requeridos. Em um futuro (possivelmente próximo), podemos nos ater ao cenário das “Equações Totalmente Não-Lineares Elípticas” cuja propriedade de soluções clássicas que respalda a definição de soluções fracas é o “Princípio do Máximo”. Desta maneira, poderemos atacar problemas na forma não-divergente.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao PIBIC-UNILAB pela concessão da bolsa que permitiu a manutenção das atividades que resultaram neste trabalho.

REFERÊNCIAS

EVANS, Lawrence C. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 1997.

TEIXEIRA, Eduardo Vasconcelos. Introdução à Teoria de Regularidade elíptica: uma abordagem geométrica. Fortaleza: UFC, 2014.