NEA ONNIM NO SUA, OHU
SEMANA UNIVERSITÁRIA
UNILAB Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
ISSN: 2447-6161

OSCILADOR HARMÔNICO: MODELO PARA A DESCRIÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS EM EQUILÍBRIO ESTÁVEL SOFRENDO PEQUENAS OSCILAÇÕES

Pedro Henrique Ferreira de Oliveira[1], João Philipe Macedo Braga[2]

Resumo: Quais as relações entre uma molécula, um pêndulo, uma conta e um líquido dentro de um tubo? A priori estes quatro sistemas parecem ser totalmente desvinculados um do outro, no entanto carregam no âmago de seu movimento algo em comum, há um modelo descritivo que abrange todos estes quatro, com determinadas condições. A Matemática que nos possibilitou estudar e correlacionar estes problemas variados foi a Série de Taylor, instrumento matemático que possibilita aproximar a função energia potencial como um polinômio em torno do centro do movimento para pequenas oscilações. O estudo de sistemas físicos, sobretudo o estudo do movimento em uma abordagem dinâmica é transpassado pelo conceito de generalização, onde um caso particular, aparentemente simples, o oscilador harmônico pode ser tomado como modelo central para o estudo de casos mais gerais e ainda específicos como os já mencionados. O objetivo deste trabalho, é discutir o poder de generalização desse modelo. A conclusão obtida é de que qualquer sistema físico em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações é um oscilador harmônico, sendo então de grande importância para a compreensão da teoria, consolidando assim um arranjo no âmbito da pesquisa em Ensino de Física nessa temática, tendo ainda o potencial para ser empregado como material complementar em cursos de Física e/ou Ciências correlatas em nível de graduação e pós-graduação.

Palavras-chave: oscilador harmônico. teoria das pequenas oscilações. modelo de descrição. abordagem do movimento. Ensino de Física.

INTRODUÇÃO

Dentre todos os tipos de movimento presentes na natureza, os oscilatórios ganham certo destaque, sobretudo por sua harmonia. Exemplos de oscilações vão desde pêndulos e candelabros até instrumentos musicais como a guitarra elétrica (NUSSENZVEIG, 2014). O Movimento Harmônico Simples, considerando apenas um grau de liberdade ao seu sistema, é um dos mais simples e icônicos problemas (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2013), inclusive no Ensino Médio, onde o sistema massa-mola representa desafios em provas de Física.

Mas afinal, qual a relevância de se estudar o movimento de uma massa cujo movimento é restrito à uma mola se ninguém possui em sua casa uma massa e uma mola? Certamente esse questionamento já passou ao menos uma vez na cabeça de todos quando são introduzidos a este problema sem uma devida contextualização de sua relevância. O Oscilador Harmônico é, possivelmente, o problema mais importante do movimento unidimensional (WATARI, 2004).

[1] Estudante. Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, e-mail: pedroh@aluno.unilab.edu.br
[2] Docente. Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, e-mail: philipe@unilab.edu.br

ISSN: 2447-6161

Nessa perspectiva o presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise crítica e ao mesmo tempo didático-pedagógica de quatro situações onde não há necessariamente massas fixas à molas de determinada constante elástica, sendo então de grande importância para a compreensão da teoria de pequenas oscilações, consolidando assim um arranjo no âmbito da pesquisa em Ensino de Física nessa temática, tendo potencial para ser empregado como material auxiliar em cursos em nível de graduação e pós-graduação.

METODOLOGIA

Um sistema relativamente simples se configurar como um modelo para a descrição de inúmeros sistemas físicos, com naturezas adversas, parece estranho à uma primeira leitura. Um fato obtido analiticamente é que se um sistema puder ser totalmente descrito como uma função de sua posição, então é possível estabelecer uma função potencial $V = V(\vec{r})$, ou para o caso unidimensional $V = V(x)$. Um método matemático para o estudo de uma função é a Série de Taylor, que expande uma função qualquer em termos de uma soma de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{(n)} f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \tag{1}$$

que para a função potencial unidimensional é reescrito como sendo

$$V(x) = V(x_0) + \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \cdots \tag{2}$$

Tomemos então algumas considerações (SYMON, 1982) para a análise de nosso problema:

i) A energia em ponto de referência pode ser tomada igual à zero, isto é $V(x_0) = 0$;

ii) Como o sistema está em equilíbrio, então $\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$;

iii) E não apenas isso, pois o equilíbrio é estável e, portanto $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0} = k > 0$.

iv) Além disso o fato do sistema sofrer pequenas oscilações implica que $|x - x_0| \to 0$.

Deste modo ao combinar estas expressões obtemos

$$V(x) = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \equiv \frac{1}{2} k \tilde{x}^2, \tag{3}$$

em que $\tilde{x}$ corresponde à uma translação de eixos, tal que $\tilde{x} = x - x_0$. A equação acima implica que todo sistema físico em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações, é um Oscilador Harmônico. Esta afirmação, até mesmo poética, evidencia todo o poder do formalismo, pois é a função potencial que molda um sistema físico, tomada aqui em sua forma geral.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

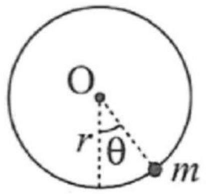
Pois bem, vimos aqui que o Oscilador Harmônico se constitui teoricamente como um modelo primordial para o estudo de sistemas físicos em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações. Esta formulação é ampla o suficiente para ser aplicada em casos onde não

ISSN: 2447-6161

há especificamente uma ‘massa’ e uma ‘mola’? Discutiremos a seguir quatro exemplos que poderão evidenciar que sim, é possível descrever sistemas que não possuem massas presas à molas com a física e a matemática empregadas ao icônico sistema massa-mola.

EXEMPLO 1: [Problema 3.4 (NUSSENZVEIG, 2014)] Imagine uma conta de massa m disposta em um aro vertical fixo de raio r, no qual desliza sem atrito em torno do ponto mais baixo, formando um ângulo $\theta \ll 1°$.

FIGURA 1 – Conta móvel à um aro fixo em um movimento oscilatório.



FONTE: (NUSSEZVEIG, 2014)

Facilmente se percebe que a trajetória formada pela conta é um arco de circunferência devido à força peso da própria conta, que gera sobre si um torque. O torque, ou melhor seu módulo, possui duas definições, uma relacionada à sua posição angular em função do tempo $\tau = rF\sin\theta$, e a outra que é análoga do Princípio Fundamental da Dinâmica para rotações $\tau = I\alpha$, onde I é o momento de inércia da massa. Em validade essas duas definições são equivalentes. Além disso para o sistema em questão sabemos que $I = mr^2$, $F = P = -mg$, $\alpha = \ddot{\theta}$ e $\theta \to 0 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$. Portanto

$$mr^2\ddot{\theta} = -rmg\theta, \tag{4}$$

portanto se definirmos a quantidade $\omega_0^2 \coloneqq g/r$ obtemos a EDO do Oscilador Harmônico

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \tag{5}$$

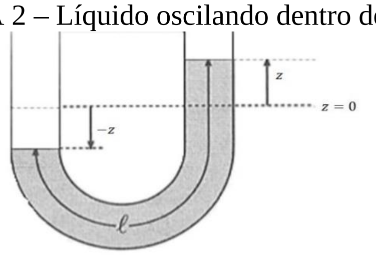
Cuja frequência para pequenas oscilações é dada por

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}. \tag{6}$$

EXEMPLO 2 [Exemplo 3-d (NUSSENZVEIG, 2014)] Seja então disposto um fluido (líquido) de densidade ρ em um tubo U de seção transversão A, e seja l o comprimento total da coluna líquida, de modo que a massa total de líquido é $M = \rho A l$. A partir de um pequeno deslocamento de uma posição de equilíbrio $z = 0 \Rightarrow U = 0$.

O fluído se desloca dentro do tubo devido à uma energia potencial do tipo $U = U(z) = mgz$, onde m é a massa deslocada e, portanto $m \equiv \rho A z$.

FIGURA 2 – Líquido oscilando dentro de um tubo.



FONTE: (NUSSEZVEIG, 2014)

Nea Onnim No Sua, Ohu
SEMANA UNIVERSITÁRIA
ISSN: 2447-6161
UNILAB Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

Deste modo o potencial que a massa deslocada de água sofre possui a seguinte forma funcional

$$U(z) = \rho A g z^2, \tag{7}$$

isto é, um potencial parabólico. Neste caso a 'constante elástica' seria definida por $k \equiv 2\rho A g$, equivalendo à uma taxa de crescimento da força de empuxo do fluido em relação à variação do nível do mesmo. Além disso a frequência natural de oscilação do movimento é, portanto

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{M} = 2\frac{g}{l}, \tag{8}$$

o que nos leva à frequência para pequenas oscilações

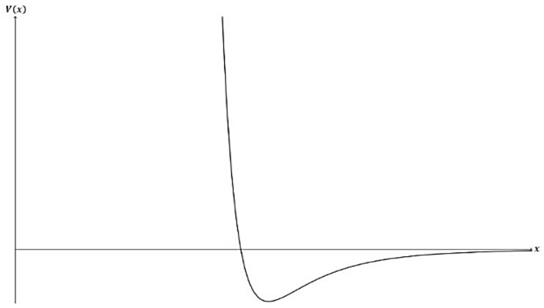
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}. \tag{9}$$

EXEMPLO 3 [Problema 2.4.5 (WATARI, 2004)] Sabendo que a energia potencial para a força de interação entre dois átomos numa molécula diatômica possui a seguinte forma funcional

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}, \tag{10}$$

onde a e b são constantes positivas e x o tamanho da molécula. Se um dos átomos for suficientemente pesado, então pode-se considerar este como fixo enquanto o outro move-se ao longo de uma reta. Pelo potencial fornecido é possível plotar o seguinte gráfico

FIGURA 3 – Potencial intermolecular.



FONTE: (Autores)

Da figura é possível observar um ponto x_0 onde há um equilíbrio estável para a molécula, deste modo é possível aproximá-la para um Oscilador Harmônico. Para determina-lo basta tomarmos a primeira derivada do potencial como sendo nula, o que nos leva à

$$\frac{6a}{x_0^7} - \frac{12b}{x_0^{13}} = 0, \tag{11}$$

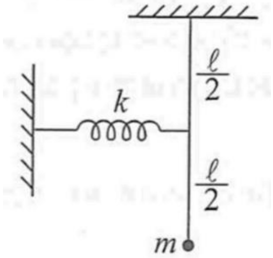
que ao ser resolvida nos retorna $x_0 = \sqrt[6]{2b/a}$. Deste modo a frequência f pode ser obtida sabendo que a 'constante elástica' é então definida pela segunda derivada sobre o ponto de equilíbrio, portanto

$$f \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{m}}\sqrt{\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0}} = \frac{3a}{2\pi\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2}{b}\left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{1}{3}}}. \tag{12}$$

EXEMPLO 4 [Problema 19 (NUSSEZVEIG, 2014)] Seja disposto um pêndulo por uma barra de massa desprezível de comprimento fixo l com uma massa suspensa, que esteja ligado em seu ponto médio à uma mola horizontal de constante elástica k.

ISSN: 2447-6161

FIGURA 4 – Pêndulo com mola.



FONTE: (NUSSEZVEIG, 2014)

Na análise deste problema há duas forças atuando sobre o sistema (massa-barra), a força peso na massa e a força elástica na barra, ambas geram torque sobre o sistema. Para pequenas oscilações o torque devido à força peso é

$$\tau_P = -mgl\sin\theta = -mgl\theta \tag{13}$$

e o torque devido à força elástica é

$$\tau_E = -\frac{l}{2}k\left(\frac{l}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{kl^2}{4}\theta, \tag{14}$$

Por outro lado o torque resultante $\tau = \tau_P + \tau_E = I\ddot{\theta}$, como $I = ml^2$ temos que

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta - \frac{kl^2}{4}\theta, \tag{15}$$

o que nos leva à EDO do Oscilador Harmônico

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}\right)\theta = 0, \tag{16}$$

cuja frequência natural de oscilação é

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}. \tag{17}$$

CONCLUSÕES

Ao longo deste escrito foi possível notar a generalidade do conhecido sistema ‘massa-mola’ em situações mais gerais, onde não há a presença de entidades físicas como uma massa e/ou uma mola. Concluímos que qualquer sistema físico em equilíbrio estável sofrendo pequenas oscilações é um oscilador harmônico, sendo possível determinar a frequência para pequenas oscilações do movimento.

REFERÊNCIAS

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. 9 ed. v 2. São Paulo: LTC, 2013.

KITEEL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A. **Mecânica** – Curso de Física de Berkeley. v 1. São Paulo: Blucher,1973.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 5 ed. v 2. São Paulo: Blucher, 2014.

SYMON, K. R. **Mecânica**. 5 ed. São Paulo: Campus, 1982.

WATARI, K. **Mecânica Clássica**. 2 ed. v 1. São Paulo: Livraria da Física, 2004.