

SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM \mathbb{R}^3 E O PROBLEMA DE PLATEAU

Janaina da Silva Arruda¹, Rafael Jorge Pontes Diógenes²

Resumo: O presente trabalho apresenta o estudo realizado sobre superfícies mínimas no espaço tridimensional. Uma superfície é dita mínima se sua curvatura média é identicamente nula. Lagrange (1760) foi o primeiro a definir uma superfície mínima, onde ele obteve uma equação diferencial parcial que descrevia as superfícies mínimas. As superfícies mínimas é uma das superfícies mais estudadas em geometria diferencial. Mesmo sendo de uma disciplina considerada básica, as superfícies mínimas ainda estão sendo investigadas, pois há ligações profundas com funções analíticas de variáveis complexas e com equações diferenciais parciais. Os resultados dessa teoria, em geral, são de fácil visualização e de difíceis provas. As superfícies mínimas são geralmente associadas às películas de sabão, que podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Tal superfície, em seus pontos regulares, tem a curvatura média nula. A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau, que, a grosso modo, pode ser descrito da seguinte maneira: provar que para cada curva fechada C em \mathbb{R}^3 existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira. Nesse sentido, com o objetivo de compreender essa relação entre superfícies mínimas e películas de sabão, realizou-se alguns experimentos com películas de sabão, afim de obter representações de superfícies mínimas. Os resultados dos experimentos foram explicados fisicamente.

Palavras-Chave: Superfícies mínimas. Curvatura média. Problema de Plateau.

INTRODUÇÃO

Uma superfície parametrizada regular ou uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima se possui curvatura média zero em todos os seus pontos. A palavra mínima está relacionada com o problema de Lagrange: Dada uma curva fechada C , achar a superfície de área mínima que tem esta curva como fronteira.

As superfícies mínimas são associadas às películas de sabão. Uma curva C feita de arame quando mergulhada uma solução de sabão e retirada cuidadosamente forma uma superfície, por meio de explicações físicas pode-se provar que tal superfície é mínima.

¹ Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, e-mail: janasilvaarruda@gmail.com

² Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, e-mail: rafaeldiogenes@unilab.edu.br

A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau, um físico belga que se dedicou em realizar experimento com películas de sabão em meados de 1850. No entanto, os resultados dos experimentos de Plateau foram explicados fisicamente. Assim, surgiu o problema de Plateau: provar que, para cada curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$, existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira. Isto é, queremos minimizar a área dentre todas as superfícies do \mathbb{R}^3 com fronteira dada C .

Neste trabalho nosso objetivo é entender algumas propriedades importantes das superfícies mínimas e relacioná-las com as películas de sabão, realizando alguns experimentos, como os realizados por Plateau.

METODOLOGIA

A realização do projeto ocorreu em duas etapas: estudo das superfícies mínimas e o problema de Plateau. Com o auxílio do livro Superfícies Mínimas do Manfredo do Carmo e artigos mais recentes para compreender os resultados já existentes.

Iniciou-se com o estudo das superfícies mínimas as quais são superfícies cuja curvatura média é identicamente nula ($H = 0$), primeiramente procurou-se entender, matematicamente, esse conceito, e alguns exemplos de superfícies mínimas, como o catenoide, helicoide, superfície de Enneper, entre outras. Após, continuou-se com o estudo de propriedades importantes para compreender o problema de Plateau.

Finalizado o estudo das propriedades das superfícies mínimas, iniciou-se o problema de Plateau. Primeiramente, investigou-se alguns exemplos de superfícies mínimas que são soluções do problema de Plateau procurou-se entender a relação das superfícies mínimas com as películas de sabão, e utilizar os métodos realizados por Plateau para construir superfícies mínimas utilizando películas de sabão.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

De acordo com os experimentos realizados por Plateau pode-se obter superfícies mínimas mergulhando uma moldura formada por arame em uma solução de sabão. Assim, para se obter a superfície mínima cuja a fronteira seja uma circunferência



basta imergir em uma solução de água e detergente um arame em forma de anel (veja Figura 1).

FIGURA 1 – Superfície de bolha de sabão



FONTE DO AUTOR

Como foi demonstrado, a helicóide é uma superfície mínima, assim um arame em formato de uma hélice nos dá a superfície mínima helicóide (veja Figura 2).

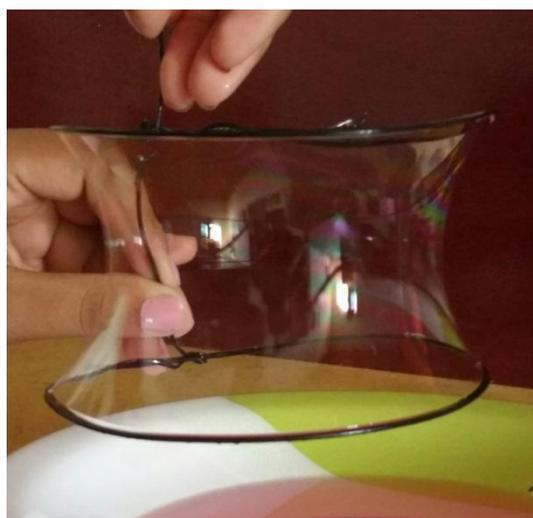
FIGURA 2 - Helicóide de película de sabão



FONTE DO AUTOR

Como a catenoide é uma superfície mínima, para representá-lo com películas de sabão, utilizaram-se dois arames em formatos de circunferências com raios iguais (veja Figura 3).

FIGURA 3 – Catenoide de película de sabão



FONTE DO AUTOR

Pode-se perceber que as superfícies formadas pelas películas de sabão, possuem os arames como fronteira as quais estão em equilíbrio sob a ação da tensão superficial do líquido. De acordo com Laplace, a pressão em cada ponto exercida pela superfície sobre o meio ambiente é dirigida na direção da normal à superfície e é proporcional a curvatura média H ; como a superfície está em equilíbrio, tal pressão, donde H , se anula em todos os seus pontos.

As películas de sabão que são superfícies regulares são, portanto, superfícies mínimas.

CONCLUSÕES

Durante o desenvolvimento da pesquisa foram poucas as dificuldades encontradas. Pode-se compreender bem as propriedades das superfícies mínimas resultados e aplicações importantes para a geometria e para matemática. Os experimentos realizados com as películas de sabão, além de representar fisicamente problemas matemáticos, se torna algo didático de compreender um assunto tão abstrato.

Por fim, a pesquisa voltada para o estudo de superfícies proporcionou grandes conhecimentos matemáticos na área da geometria diferencial, disciplina esta que não está presente no curso de licenciatura Ciências da Natureza e matemática.

AGRADECIMENTOS

À Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. **Superfícies Mínimas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Coleção Publicações matemáticas)

CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.