O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH APLICADO AO ESTUDO DE RAÍZES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

Erika Joyce Silva Lima [1], João Francisco da Silva Filho [2]

RESUMO

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um resultado de Análise Matemática, que aplica-se a uma classe de aplicações contínuas, chamadas contrações, definidas sobre subconjuntos fechados de espaços métricos completos, ou seja, espaços métricos nos quais toda sequência de Cauchy é convergente. Muitas vezes, os métodos numéricos iterativos e o estudo de soluções de equações diferenciais/integrais baseiam-se no estudo de pontos fixos e convergência de determinadas sequências. Neste sentido, o Teorema do ponto fixo de Banach corresponde a uma importante ferramenta no estudo da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais/integrais e no estudo de métodos numéricos iterativos. No presente trabalho, estudamos o Teorema do ponto fixo de Banach, bem como algumas de suas aplicações, principalmente relacionadas a métodos numéricos iterativos. Mais precisamente, concentramos nossas atenções no estudo das aplicações voltadas para pontos fixos e raízes de funções reais. Diante do exposto, obtemos resultados acerca da convergência do método de Newton-Raphson para funções polinomiais do quarto grau, estabelecendo condições sobre os valores iniciais para os quais pode-se garantir a convergêcia monótona do método supracitado.

PALAVRAS-CHAVE

Teorema do ponto fixo de Banach. Raízes de funções polinomiais. Métodos numéricos iterativos.

---

[1] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN, Discente, e-mail: erikajoyce.8@gmail.com
[2] Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN, Docente, e-mail: joaofilho@unilab.edu.br

INTRODUÇÃO

O Teorema do ponto fixo de Banach garante a existência e unicidade de pontos fixos de aplicações contínuas particulares, chamadas de contrações, definidas em subconjuntos fechados de espaços métricos completos, conforme apresentado por Botelho (2010), Oliveira (2008) e Lima (2009). Por outro lado, este teorema fornece um método iterativo que nos permite calcular aproximações dos pontos fixos e estimar o erro de truncamento a cada iteração realizada, constituindo-se assim numa poderosa ferramenta com aplicações na Matemática Pura e na Matemática Aplicada.

Dentre as várias aplicações do Teorema do ponto fixo de Banach, destacam-se as aplicações relacionadas ao estudo de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais e/ou equações integrais. Mais precisamente, podemos citar o Teorema de Picard para equações diferenciais, bem como as aplicações no estudo das equações integrais de Fredholm e Volterra, conforme pode ser encontrado em Figueiredo/Neves (2012) e Sotomayor (1979). O Teorema do Ponto Fixo de Banach também pode ser aplicado nas demonstrações do Teorema da perturbação da identidade e no Teorema da função inversa, conforme apresentado por Lima (2006).

Na Análise Numérica, encontramos aplicações do Teorema do ponto fixo de Banach no desenvolvimento dos métodos numéricos iterativos, tais como o método de Newton-Raphson, método do ponto fixo e os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, que fornecem aproximações de raízes de equações e soluções de sistemas de equações. Neste trabalho, estudamos a convergência do método de Newton-Raphson aplicado às funções polinomiais, obtendo condições sobre os valores iniciais que garantem a convergência monótona (crescente e/ou decrescente) do referido método para funções polinomiais do quarto grau.

METODOLOGIA

Basicamente, o estudo foi desenvolvido por meio de livros, artigos científicos e dissertações relacionados(as) ao Teorema do ponto fixo de Banach e suas aplicações, contando ainda com a realização de seminários semanais para discussões sobre o conteúdo estudado, esclarecimento de eventuais dúvidas e exposições. Na primeira fase do trabalho, foi realizada a aquisição dos pré-requistos necessários para o desenvolvimento da pesquisa, em seguida, chegou-se ao Teorema do ponto fixo de Banach, onde estudamos os espaços métricos, espaços métricos completos, raízes, pontos fixos e do Teorema do ponto fixo de Banach aplicado a subconjuntos fechados de espaços métricos completos.

Posteriormente, nossas atenções foram concentradas no estudo de aplicações do Teorema do ponto fixo de Banach, enfatizando as aplicações relacionadas aos métodos numéricos iterativos, a pontos fixos e a raízes de funções. Neste momento, realizou-se ainda um estudo preliminar sobre a convergência do método de Newton-Raphson e do método do ponto fixo, ambos comumente usados para a obtenção de aproximações decimais de raízes e/ou pontos fixos de funções.

Na fase final da pesquisa, fase que corresponde a obtenção e análise de resultados, foram estudadas efetivamente as aplicações do Teorema do ponto fixo de Banach no cálculo de aproximações decimais de raízes de funções polinomiais, dando ênfase ao estudo da convergência do método de Newton-Raphson. Convém ressaltar que os resultados obtidos durante a pesquisa foram registrados em forma de artigo que posteriormente pretendemos submeter na Revista Eletrônica da Matemática.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Sabe-se que as raízes de equações polinomiais de primeiro e segundo graus podem ser facilmente determinadas por métodos diretos, enquanto para terceiro e quarto graus dispomos da fórmula de Cardano-

Tartáglia e do método de Ferrari, respectivamente, que não possuem caráter muito prático. Deve-se ressaltar que a partir do quinto grau, não dispõe-se de fórmulas ou métodos diretos para obter as raízes de equações polinomiais na sua forma geral. Neste sentido, Niels Henrik Abel (1802-1829) provou que a "equação geral" do quinto grau não é solúvel por radicais, enquanto Evariste Galois (1811-1832) mostrou precisamente quando um polinômio de grau maior ou igual a cinco é ou não solúvel por radicais.

Em termos de funções polinomiais, pode-se afirmar que dispomos de métodos diretos para determinar raízes de funções polinomiais apenas até o quarto grau, porém os métodos disponíveis para terceiro e quarto graus apresentam dificuldades que precisam ser contornadas por métodos numéricos iterativos. Por sua vez, os métodos numéricos iterativos impõem dificuldades quanto ao isolamento de raízes e na escolha dos valores iniciais para garantir a convergência.

Motivados pelas dificuldades mencionadas, conseguimos estabelecer condições sobre os valores iniciais para os quais pode-se garantir a convergência monótona do método de Newton-Raphson para funções polinomiais do quarto grau, similar ao que havia sido obtido por Pereira e Silva Filho (2017) para funções polinomiais do terceiro grau. Para além disso, foi mostrado, através de contra-exemplos, que os referidos resultados não podem ser estendidos, sob as mesmas condições, para funções polinomiais com grau maior que quatro. Devemos ressaltar que os resultados obtidos foram registrados em um trabalho, escrito na forma de artigo (cf. LIMA et. al (2019)), que em breve deverá ser submetido na Revista Eletrônica da Matemática.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram obtidos resultados sobre a convergência do método de Newton-Raphson para funções polinomiais, estabelecendo condições para a escolha dos valores iniciais de modo que se pode garantir a convergência monótona do método de Newton-Raphson para funções polinomiais de quatro grau, semelhante ao que já havia sido obtido por Pereira e Silva Filho (2017) sobre funções polinomiais do terceiro grau. Ademais, mostrou-se, por meio de contra-exemplos, que esses resultados não podem ser estendidos para funções polinomiais de grau maior que quatro.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – PIBIC/UNILAB, pelo suporte financeiro que possibilitou a realização do projeto "O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações".

REFERÊNCIAS

ARNALES, S. DAREZZO, A. Cálculo Numérico: Aprendizagem com Apoio de Software. São Paulo: Thompson, 2000.

BARROS, C. D. O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas aplicações. 2013, 53 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - PROFMAT, Universidade Federal da Paraiba, João Pessoa, 2013.

BOTELHO, G. at el. Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Análise Numérica. São Paulo: Thompson, 2008.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. Equações Diferenciais Aplicadas, 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GEOGEBRA (https://www.geogebra.org/). LIMA, E. L. Curso de Análise Volume 1, 10ª Edição. Rio de Janeiro:

IMPA, 2002.

LIMA, E. L. Curso de Análise Volume 2, 10ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LIMA, E. L. Espaços Métricos, 4ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

LIMA, E. L. Elementos de Topologia Geral, 3ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, E. L. Análise Real Volume 2, 6ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. Análise Real Volume 1, 11ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. J. S.; PEREIRA, O. E. S. e SILVA FILHO, J. F. O Método de Newton-Raphson Aplicado às Funções Polinomiais do 4º Grau. Redenção, 2019 (Artigo em Processo de Elaboração).

LOPES, V. L. R.; RUGGIERO, M. A. G. Cálculo Numérico: Aspectos Numéricos e Computacionais, 2ª Edição. São Paulo: Makron Books, 1997.

OLIVEIRA, M. A. O Método de Newton em Espaços de Banach. 2000, 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2000.

OLIVEIRA, C. R. Introdução à Análise Funcional, 2ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

PEREIRA, O. E. S. e SILVA FILHO, J. F. O Método de Newton-Raphson e as Funções Polinomiais do Terceiro Grau. Matemática e Estatística em Foco, v. 5, n. 1, p. 22-36, 2017.

SOTOMAYOR, J. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.